УДК 681.3:004.94

**О времени в моделях сложных дискретных**

**систем[[1]](#footnote-1)**

В.П. Кутепов, В.Н. Фальк

Рассматриваются частично-упорядоченные множества для представления времени в моделях сложных иерархически организованных и рекурсивно определенных дискретных систем. Предлагаются средства конструктивного задания шкал времени в форме так называемых Т-сетей. Для систем с недетерминированным поведением и изменяемой конфигурацией предложено задание множеств шкал времени с помощью определенных в статье Т-сетевых грамматик.

**Ключевые слова:** *модели поведения дискретных систем*, *динамические системы*, *формализация шкал времени в системах*, *частично-упорядоченные множества*, *средства конструктивного задания шкал времени для иерархических динамических систем*, *Т-сети*, *контекстно-свободные Т-сетевые языки и грамматики*

**Keywords:** *models of behavior of discrete systems, dynamical systems, formalization of time scales in systems, partially ordered sets, means for constructively setting time scales for hierarchical dynamical systems, T-networks, context-free T-network languages and grammars*

1. **Введение**

*Propter hoc ergo post hoc*

Понятие времени – одно из важнейших при исследовании поведения различных объектов, систем и процессов. Причинно-следственные связи, приводящие к смене их состояний предполагают, что следствие всегда наступает **после** появления причины. Кроме того, как правило, для смены состояний необходимо **одновременное** наличие нескольких причин.

При анализе поведения дискретных систем множество возможных моментов времени – «шкала» времени – обычно формально описывается как линейно-упорядоченное множество с теми или иными дополнительными свойствами, например: по мощности (конечное, счетное или континуум); ограниченное (сверху и-или снизу) или нет; имеющее наибольший и-или наименьший элемент; дискретное, плотное или непрерывное; рекурсивное, рекурсивно-перечислимое или рекурсивно не перечислимое; конструктивно заданное или имеющее вероятностную (нечеткую) природу и т.д.

Если же мы имеем дело с поведением систем с ограниченной или динамически варьируемой и потенциально неограниченной по сложности и по глубине структурой, то возникает вопрос о внутреннем поведении ее отдельных компонентов, когда на отдельных интервалах общей системной шкалы времени поведение компонента является скрытым от других компонентов на том же и на других уровнях иерархии в системе. В этом случае теряет смысл сравнение времен событий в таких компонентах, а вместе с этим и общая трассировка поведения системы. Уже давно появляются работы, вызванные неудовлетворенностью традиционных подходов к концепции времени при описании процессов в сложных дискретных системах.  Среди работ, наиболее близких по своему подходу к данной проблеме, отметим статью [1], которая посвящена построению оптимальных алгоритмов упорядочения событий в системе на основании отслеживания и упорядочивания моментов взаимодействия компонентов системы и установлении причинно-следственных связей между событиями. В отличие от более простых и ограниченных алгоритмов, основанных на так называемых скалярных [2] и векторных [3] представлениях временных отсчетов, в [1] используются иерархические часы, которые позволяют компоненту системы явно определять не только следование событий, но также устанавливать причинно-следственные связи между ними. Работа [4] дает представление о временных процессных алгебрах, которые создавались с целью описания последовательно-параллельных процессов с учетом различных способов задания в них времени.

Естественным решением, на наш взгляд, является **концепция шкалы времени как частично-упорядоченного множества.**

В математической среде тоже больше внимания уделяется проблемам классификации, композиции и различным отношениям на универсуме ациклических орграфов, например, [5].

Настоящая публикация отражает наш подход к проблеме описания шкал времени, в основе которого лежит предположение, что для независимых компонентов систем общими моментами времени являются только моменты их взаимодействия.

1. **Известные базовые понятия**

Напомним необходимые для изложения понятия и введем некоторые используемые в статье обозначения.

Пусть  – транзитивное антирефлексивное *отношение строгого порядка* на множестве  (далее вместо  будем писать ): , . Иными словами,  – частично (строго) упорядоченное множество. Истинность   означает сравнимость . Без существенных потерь для нашего исследования предположим, что в  нет «лишних» элементов, не сравнимых ни с одним другим элементом : . Элемент  называется *минимальным* в , если , элемент  называется *максимальным* в , если . Если в  имеется единственный минимальный элемент (обозначим его ), он называется *наименьшим* в , если в  имеется единственный максимальный элемент (обозначим его ) он называется *наибольшим* в . Существование наименьшего (наибольшего) элемента в  может постулироваться аксиомой  ( , соответственно).

Если  – конечное множество (), то и количество различных (с точностью до изоморфизма) частично (строго) упорядоченных множеств любой мощности – конечно, а, следовательно, нет проблемы их конструктивного задания. В этом случае одной из возможных форм является задание на базе ациклических орграфов без петель на множестве вершин , в общем случае, с несколькими компонентами связности. С учетом принятого соглашения предполагается, что в графе  нет изолированных вершин. Так как множество  дуг в произвольном орграфе  без петель есть подмножество множества всевозможных двухэлементных упорядоченных подмножеств , то оно представляет собой некоторое бинарное антирефлексивное отношение  на . В наших обозначениях[[2]](#footnote-2) это записывается так: , а множество всевозможных орграфов без петель и изолированных вершин на множестве вершин  есть . Если орграф является ациклическим, т.е. для любой его дуги  не существует пути из  в , то транзитивное замыкание любого такого отношения  является, очевидно, отношением частичного (строгого) порядка на [[3]](#footnote-3).

1. **Т-сети. Основные определения**

Целью нашей работы является создание практически удобных средств конструктивного задания частично-упорядоченных шкал времени для адекватного описания поведения иерархически и рекурсивно организованных систем.

Для достижения этой цели, во-первых, как было указано, мы основываемся на традиционном представлении частично-упорядоченных множеств ациклическими орграфами без петель. Во-вторых, переход к бесконечным по мощности шкалам времени обеспечивается интерпретацией дуг орграфа как линейно упорядоченных подмножеств моментов времени, в том числе и бесконечных, возможно, обладающих какими-то из ранее указанных аксиоматически задаваемых свойств. В третьих, так как поведение систем, как правило, не носит детерминированный характер и предполагает возможность разных реализаций в них процессов, то необходимым объектом описания становятся не конкретные шкалы времени, а **множества** возможных шкал времени. Особенно актуальным это является для динамических систем, структура которых меняется во времени и сложность которых может неограниченно возрастать. Наконец, вместо формализма теории графов мы предлагаем использовать более сложные понятия ***Т-сети*** и ***Т-сетевого языка***, во многом подобные тему которые использовались нами в теории направленных отношений [6,7].

В основе понятия Т-сети лежит двудольный граф с вершинами двух видов: *точками* и *элементами*. Арностью Т-сети и арностью элемента Т-сети называется упорядоченная пара  натуральных чисел , означающая, соответственно, количества входов и выходов Т-сети или ее элемента.

Определение. *Базисом*  называется конечное множество сортов элементов Т-сети. Функции  задают арность  элементов Т-сети сорта . Базис в общем случае разбивается на два подмножества:  – терминальный базис и  – нетерминальный базис. Все сорта из  имеют арность , а элементы этих сортов интерпретируются как линейно-упорядоченные подмножества моментов времени:

* элементы сорта  – как конечное множество мощности ,
* элементы сорта  – как множество счетной мощности,
* элементы сорта  – как плотное множество счетной мощности, На рис. 1 показано графическое представление терминальных элементов указанных сортов, а также представление элемента нетерминального сорта .

Рис.1. Графическое представление элементов Т-сетей.

б) элементы нетерминальных сортов 

а) элементы терминальных сортов

















Определение. Т*-сетью*  ( – арность Т-сети) в базисе  называется набор , где  – конечное множество *точек* Т*-сети*,  – кортеж  *входных точек* Т*-сети*,  – кортеж  *выходных точек* Т*-сети*,  – комплект[[4]](#footnote-4) *элементов*  Т-сети,  – сорт элемента,  – кортеж входных точек элемента,  – кортеж выходных точек элемента,  – множество ребер  dif-*графа* Т*-сети* (без петель).

Как было указано выше, Т-сеть можно рассматривать как специальным образом нагруженный двудольный орграф с вершинами двух видов (точки и элементы): элементы взвешены сортами из базиса, дуги, входящие в элементы и выходящие из элементов, линейно упорядочены, а их количества определяются сортами элементов, дополнительно задаются компоненты , и . Это позволяет не определять известные понятия *пути*, *цикла* и т.д. относительно вершин типа «точка». Так как нас интересуют только Т-сети без циклов, то является необходимым ограничение 1 на их компоненты: множество точек Т-сети *ранжируемо* – существует функция , такая, что для любого элемента Т-сети, его любой выходной точки  и его любой входной точки  выполняется условие .

Утверждение. Для любой функции ранжирования  и любых  функция , такая, что

,

также является функцией ранжирования (доказательство очевидно).

Если ранжирование возможно, то в Т-сети нет циклов, и существует «минимальная» функция ранжирования , такая, что для любой другой функции ранжирования  выполняется условие :

* , если и только если  не является выходной точкой некоторого элемента,
* в противном случае, , где  – множество всех входных точек всех элементов, для которых точка  является выходной.

Заметим, что существует простой итерационный алгоритм определения ранжируемости Т-сети, который при положительном ответе задает для всех точек этой сети значения функции .

Предполагается, что в множестве точек нет «лишних» точек, не являющихся ни входами, ни выходами Т-сети, ни входами, ни выходами ни одного элемента Т-сети и не инцидентных ни одному ребру ее dif-графа. Для иллюстраций будем использовать графическое представление Т-сетей, которое определяется аналогично графическому представлению сетей отношений [6,7], причем единственное отличие состоит только в представлении элементов терминальных сортов (рис. 1). Это представление предполагает, что Т-сети рассматриваются с точностью до изоморфизма относительно множества точек Т-сети.

Т-сети арности , все элементы которых – терминальных сортов, а dif-граф – пустой, *интерпретируются* как множества, единственными элементами которых являются конкретные шкалы времени, при этом точки сети интерпретируются как моменты времени, не принадлежащие частично-упорядоченным подмножествам, представленным в интерпретации элементами терминальных сортов. Отношение строгого порядка для этих моментов времени эквивалентно наличию в Т-сети пути из первой точки во вторую. Входная точка элемента терминального сорта представляет момент времени, меньший всех моментов времени, представленных этим элементом, а, соответственно, выходная точка – момент времени, больший всех моментов времени, представленных этим элементом, причем в интерпретации для терминального сорта  сохраняется требование плотности отношения линейного порядка в расширенном указанными элементами множестве.

Наличие ребра  в dif-графе означает, что в интерпретации этим точкам сопоставлены **различные,** но **сравнимые** моменты времени. Таким образом, такая сеть в интерпретации эквивалентна подмножеству из двух Т-сетей без этого ребра в dif-графе, но каждая с одним дополнительным элементом сорта :  и , соответственно.

Элементы нетерминальных сортов Т-сетей являются, по существу, свободными вхождениями в Т-сети *сетевых переменных*, а содержащие их Т-сети являются *схемами* множеств шкал времени.

На множестве возможных шкал времени естественным образом вводится отношение  частичного порядка (не строгого). Пусть  и  – две шкалы времени. Если  и , будем говорить, что шкала  является *расширением* шкалы : . Более общей формулировкой такого рода отношения *вложения* шкал (с учетом того, что мы рассматриваем шкалы времени с точностью до изоморфизма множеств моментов времени) является истинность утверждения

.

Иногда на практике вместо минимально необходимой шкалы времени  можно использовать расширенную шкалу . Очевидно, что любая шкала, представленная Т-сетью исключительно с терминальными элементами, вложима в линейно-упорядоченную плотную шкалу времени с наименьшим и наибольшим элементами.

Кортежи входных и выходных точек как компоненты Т-сети и Т-сети с элементами нетерминальных сортов вводятся для эффективного задания иерархически организованных шкал времени и рекурсивно определенных множеств шкал времени. С их помощью мы определим[[5]](#footnote-5) операцию *подстановки*. В качестве основы определения воспользуемся введенным в [7] определением операции подстановки для сетей направленных отношений. Заметим только, что для того, чтобы не указывать направления связей между точками и элементами Т-сети нетерминальных сортов, при графическом представлении эти элементы размещаются так, что слева указываются их связи с входными точками, а справа – с выходными, в порядке перечисления сверху-вниз. То же относится и к представлению входных и выходных точек Т-сети: первые связываются с левой стороной ограничивающего представление сети прямоугольника, а вторые – с правой, так же в порядке перечисления сверху-вниз.

Результат  подстановки Т-сети  в Т-сеть  вместо ее элемента  нетерминального сорта той же арности , что и подставляемая Т-сеть. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что :



Рис. 2 иллюстрирует определение операции подстановки с использованием графического представления.

Рис. 2. Операция подстановки T-сети  в T-сеть  вместо ее элемента .  – результат подстановки.

# 

# R

# 

# 

# 

# 

# 

# 

# 

# 

# 

# 

Если, согласно этому определению, в dif-графе результата образуются петли, то результат подстановки не определен. Как видно из определения, в процессе подстановки может происходить отождествление некоторых точек, являющихся входными для нетерминального элемента, вместо которого выполняется подстановка, и входными подставляемой Т-сети, и являющихся выходными для нетерминального элемента, вместо которого выполняется подстановка, и выходными подставляемой Т-сети. Для того, чтобы в результате подстановки ациклической Т-сети в ациклическую Т-сеть полученная сеть также была ациклической, то есть ранжируемой, необходимо ввести дополнительные ограничения на компоненты  и  в определении Т-сети:

Ограничение 2. Две любые две различные точки, входящие одновременно или в кортеж , или в кортеж , не связаны в Т-сети некоторым путем. То же ограничение действует для входных и выходных точек нетерминальных элементов Т-сети (для терминальных элементов арности  такой проблемы нет).

Иными словами, в реляционной интерпретации Т-сети все входные точки попарно не сравнимы и, соответственно, все выходные точки попарно не сравнимы. Заметим, что из требования ранжируемости точек сети следует и выполнение утверждения: для любого элемента Т-сети для любой точки, входящей в кортеж выходных точек Т-сети, нет пути ни в одну из входных точек этого элемента.

Ограничение 3. Одна и та же точка не может быть одновременно и входной, и выходной точкой Т-сети (для входов и, соответственно, выходов элементов это следует из ранжируемости точек сети).

Докажем *корректность* операции подстановки, то есть, что при выполнении ограничений 1-3 результат подстановки также удовлетворяет требованиям этих ограничений.

Доказательство. Исходные Т-сети, и , и , ранжированы функциями  и , соответственно. Пусть максимальный ранг точек в Т-сети  равен , максимальный ранг входных точек элемента  в Т-сети , вместо которого подставляется , равен . Из ранжируемости Т-сети  следует, что минимальный ранг выходных точек этого элемента строго больше максимального ранга его входных точек. Сперва не будем учитывать, что при подстановке может происходить отождествление точек, как в объединении входных точек элемента Т-сети  и входных точек Т-сети , так и в объединении выходных точек элемента Т-сети  и выходных точек Т-сети . В этом случае, согласно сформулированному ранее утверждению, искомое ранжирование  можно определить так: 1) для всех точек  Т-сети  [[6]](#footnote-6), для всех точек  Т-сети , таких, что , , 2) при отождествлении -й входной точки  элемента  c -й входной точкой  Т-сети  (в результате ее обозначим как ) положим . В случаях отождествления одной или более входных точек элемента  с одной или более входными точками Т-сети , так же как при отождествления одной или более выходных точек элемента  с одной или более выходными точками Т-сети , полагаем, что ранг полученной точки  определен как минимальный из рангов отождествленных точек. В результате для полученной в результате подстановки Т-сети  сохранится ранжируемость и выполнение введенных ограничений.

1. **Рекурсивное задание множеств Т-сетей**

По аналогии с определениями сетевых языков схем направленных отношений [7], *Т-сетевым* языком арности  в терминальном базисе  называется множество Т-сетей одинаковой арности  в этом базисе. Потребность в задании множеств шкал времени, а, следовательно, и множеств задающих их Т-сетей естественно возникает при описании сложных систем, поведение которых, как правило, является недерминированным, а конфигурация системы может изменяться в процессе ее функционирования.

Для задания Т-сетевых языков могут использоваться различные *сетевые грамматики*, в частности, наиболее практически важными являются *контекстно-свободные Т-сетевые грамматики* (*кстс-грамматики*). Кстс-грамматикой называется (по аналогии с традиционной контекстно-свободной формальной грамматикой) набор , где  – терминальный базис,  – нетерминальный базис,  – *аксиома* грамматики,  – множество *правил* грамматики вида , где , а  – Т-сеть в объединенном базисе  той же арности, что и сорт .

Т-сетевой язык, заданный кстс-грамматикой , определяется как подмножество Т-сетей арности , не содержащих нетерминальных элементов и *выводимых* из аксиомы  применением правил из :

* + все Т-сети – правые части правил вывода для аксиомы – выводимы в грамматике ,
  + если Т-сеть  выводима,  – ее элемент сорта  и  – правило из , то и Т-сеть, полученная подстановкой в Т-сеть  Т-сети  вместо элемента , также выводима в грамматике .

Ограничения на объем журнальной публикации не позволяют рассмотреть сложные, содержательно интересные примеры задания множеств шкал времени для целей моделирования недетерминированного поведения иерархически организованных и рекурсивно определенных динамических систем. Поэтому, исключительно для демонстрации средств графического представления Т-сетей и грамматик для задания Т-сетевых языков приведем достаточно простой **пример**, иллюстрирующий задание множества шкал времени для различных этапов **рекурсивного** (дихотомического) вычисления значения определенного интеграла заданной унарной достаточно «гладкой» функции  на заданном интервале  с заданной точностью  методом трапеций:

 

Рис. 3 поясняет приведенное функциональное описание вычислений.

Т-сети – правые части правил сетевой грамматики отражают функциональные, а, следовательно, и причинно-следственные связи моментов времени в реализующей вычисления системе. Стандартные модели вычислений значений элементарных функций в форме Т-сетей показаны на рис. 4. Условные определения и вызов функций, представленных нетерминальными сортами, реализованы без опережающих вычислений. Входные точки – моменты завершений вычислений отдельных аргументов, выходная точка – завершение вычисления значения функции, внутренняя точка – начало вычисления значения функции.

Рис. 3. Пояснение к примеру.





















На рис. 5 приведены правила кстс-грамматики ( – аксиома). Для иллюстрации связи правил грамматики с приведенным функциональным описанием функции  (аксиома грамматики) на рис. 5 в правых частях правил у некоторых точек указаны переменные, моменты времени завершения вычислений значений которых они представляют, а в представлениях некоторых элементов терминальных сортов даны имена элементарных функций, вычисление которых они моделируют. Остальные элементы терминальных сортов отражают действия по упаковке и распаковке наборов данных. Отметим, что мы не показали правило (или правила) грамматики для нетерминального сорта : если процесс вычисления значения этой функции имеет сложный (параллельный, рекурсивный) характер, возможно, потребуются дополнительные нетерминальные сорта элементов и соответствующие правила грамматики. В противном случае, функция  может моделироваться так же, как и элементарные функции.

Рис.4. Т-модель -арного функционального преобразователя.













































































Рис.5. Пример. Правила кстс-грамматики.

































1. **Заключение**

Хорошо известны многие средства задания не только контекстно-свободных, но и более широких классов формальных языков. Их адаптация к заданию Т-сетевых языков и разработка новых специализированных видов Т-сетевых грамматик позволят адекватно строить модели времени для описания поведения всё более сложно организованных дискретных систем.

За рамками этой публикации остались и такие вопросы, как алгебраический подход к описанию различных классов, исчислений эквивалентности и вложений Т-сетей и Т-сетевых языков, а также как временн*о*е моделирование различных способов взаимодействия процессов в системах, в том числе и механизма прерывания. Мы продолжаем работу в этих направлениях.

**Литература**

1. Ravi Prakash and Mukesh Singhal.  Dependency sequences and hierarchical clocks: efficient alternativesto vector clocks for mobile computing systems //ACM| Baltzer journal on wireless network. 3,1997, P. 349-360.
2. L. Lamport. Time, clock and the ordering of events in distributed systems. Communications of ASM 21 (7), 1978, July, P. 358-365.
3. J. Fidge. Timestamps in  message- passing systems that preserve the partial ordering. Proceedings of the 11-th Australian computer  science conference, 1988, P.56-66.
4. С. A. Middelburg. Revisiting timing I process algebra. The journal of logic and algebraic programming. 54, 2003, P. 109-127.
5. Х. Ш. Аль Джабри, В. И. Родионов. Граф ациклических орграфов //  *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **25**:4(2015), 441–452.
6. Кутепов В.П., Фальк В.Н. Направленные отношения: теория и приложения // Изв. РАН. Техническая кибернетика, 1994. №4,5.
7. Фальк В.Н. Теория направленных отношений и ее приложения // Автореф. дисс. … докт. техн. наук. -М: МЭИ. -2001.-40 с.
8. Фальк В.Н. Об одном подходе к эффективной нумерации рекурсивных множеств конструктивных объектов // Вестник МЭИ, №4, 2013.

**Кутепов Виталий Павлович**

Доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики НИУ «МЭИ»

**Фальк Вадим Николаевич**

Доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики НИУ «МЭИ»

**Vitaly P. Kutepov**

Dr.Sci. (Techn.), Professor of Applied Mathematics Dept., MPEI.

**Falk V. Nikolaevich**

Dr.Sci. (Techn.), Professor of Applied Mathematics Dept., MPEI.

1. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 18-01-00548. [↑](#footnote-ref-1)
2. см., например, [8] . Для различных конечных наборов элементов некоторого множества  используются различные скобки:  – для кортежей,  – для комплектов (мультимножеств конечной мощности),  – для подмножеств конечной мощности,  – для упорядоченных подмножеств конечной мощности. Соответственно, множества всех конечных наборов элементов  этих типов обозначаются как , а их подмножества наборов из конкретного числа  элементов как . [↑](#footnote-ref-2)
3. В математической среде тоже больше внимания уделяется проблемам классификации, композиции и различным отношениям на универсуме ациклических орграфов, например, [5]. [↑](#footnote-ref-3)
4. В отличие от теории направленных отношений [6,7], в Т-сетях возможно наличие нескольких одинаковых элементов (комплект – мультимножество конечной мощности). [↑](#footnote-ref-4)
5. Алгебраический подход к композиции Т-сетей в данной статье не рассматривается, также как и логические исчисления их содержательной эквивалентности и формализации отношения вложения. [↑](#footnote-ref-5)
6.  – «равно по определению». [↑](#footnote-ref-6)